ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 141 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-5-12

УДК 517.938

О взаимоотношении движений динамических систем в сепарабельном локально компактном метрическом пространстве с инвариантной мерой

Александр Петрович АФАНАСЬЕВ[1,2], Сергей Михайлович ДЗЮБА[3]

[1] ФГБУН «Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича» Российской академии наук
127051, Российская Федерация, г. Москва, Большой Каретный переулок, 19

[2] ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»
119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1

[3] ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет»
170026, Российская Федерация, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22

Аннотация. В настоящей работе исследуются взаимоотношения рекуррентных и уходящих движений динамических систем. Под уходящим движением понимается движение, α- и ω-предельные множества которого или пусты, или не компактны. Показано, что в сепарабельном локально компактном метрическом пространстве Σ с инвариантной мерой Каратеодори почти все точки лежат на траекториях движений, которые являются или рекуррентными, или уходящими, т. е. в пространстве Σ множество точек Γ, лежащих на траекториях неуходящих и нерекуррентных движений, имеет меру нуль. Более того, любое движение, расположенное в Γ, является как положительно, так и отрицательно асимптотическим по отношению к соответствующим компактным минимальным множествам. Доказательство данного утверждения существенным образом опирается на классические теоремы о возвращении Пуанкаре–Каратеодори и Хопфа. Из этого доказательства и теоремы Хопфа следует, что в сепарабельном локально компактном метрическом пространстве возможно существование нерекуррентных устойчивых по Пуассону движений, но все эти движения с необходимостью должны быть уходящими. В то же самое время, в компактном пространстве Σ любое устойчивое по Пуассону движение является рекуррентным.

Ключевые слова: динамические системы, сепарабельное локально компактное метрическое пространство с инвариантной мерой, взаимоотношение движений

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00317, https://rscf.ru/project/22-11-00317/).

Для цитирования: *Афанасьев А.П., Дзюба С.М.* О взаимоотношении движений динамических систем в сепарабельном локально компактном метрическом пространстве с инвариантной мерой // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 141. С. 5–12. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-5-12.

SCIENTIFIC ARTICLES

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-5-12

On the interrelation of motions of dynamical systems in separable locally compact metric space with invariant measure

Aleksandr P. AFANAS'EV[1,2], **Sergei M. DZYUBA**[3]
[1] Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences
19 Bolshoy Karetny per., Moscow 127051, Russian Federation
[2] Lomonosov Moscow State University
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian Federation
[3] Tver State Technical University
22 Afanasiya Nikitina nab., Tver 170026, Russian Federation

Abstract. In this paper, we study the interrelation between recurrent and outgoing motions of dynamical systems. An outgoing motion is a motion whose α- and ω-limit sets are either empty or non-compact. It is shown that in a separable locally compact metric space Σ with invariant Carathéodory measure, almost all points lie on trajectories of motions that are either recurrent or outgoing, i. e. in the space Σ, the set of points Γ lying on the trajectories of non-outgoing and non-recurrent motions has measure zero. Moreover, any motion located in Γ is both positively and negatively asymptotic with respect to the corresponding compact minimal sets. The proof of this assertion essentially relies on the classical Poincaré–Carathéodory and Hopf recurrence theorems. From this proof and Hopf's theorem, it follows that in a separable locally compact metric space, there can exist non-recurrent Poisson-stable motions, but all these motions must necessarily be outgoing. At the same time, in the compact space Σ any Poisson-stable motion is recurrent.

Keywords: dynamical systems, separable locally compact metric space with invariant measure, interrelation of motions

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00317, https://rscf.ru/en/project/22-11-00317/).

Mathematics Subject Classification: 37B20.

For citation: Afanas'ev A.P., Dzyuba S.M. On the interrelation of motions of dynamical systems in separable locally compact metric space with invariant measure. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, 2023, vol. 28, no. 141, pp. 5–12. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-5-12. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Изложенные еще в начале прошлого века Дж. Биркгофом в книге [1] основы общей теории динамических систем по сей день в значительной степени определяют развитие нелинейной динамики и ее приложений. Конечной целью общей теории динамических систем согласно [1, с. 194] является «качественное определение всех возможных типов движений и взаимоотношений между этими движениями».

Важнейшим из движений, как известно, является рекуррентное. Дж. Биркгоф фактически показал, что в абстрактном метрическом пространстве Σ из существования движения $f(t,p)$, расположенного в компактном множестве $E\subset\Sigma$, следует существование рекуррентного движения $f(t,q)$, расположенного в компактном минимальном множестве $M\subset E$. При этом каждое непустое компактное инвариантное множество M_1 содержит компактное минимальное множество M (см., например, [2, с. 401]).

Хорошо известно, что любое рекуррентное движение устойчиво по Пуассону (см., например, [2, с. 402]). Дж. Биркгоф допускал, что существуют устойчивые по Пуассону нерекуррентные движения, т. е. устойчивые по Пуассону движения, которые не расположены в компактном минимальном множестве. Однако, ни примеров, ни критериев существования таких движений он не привел (см. [1, гл. VII]). Более того, до совсем недавнего времени эта ситуация оставалась неизменной (см., например, [3, с. 1–4]).

Заметим теперь, что в работе [4] показано, что в компактном пространстве Σ устойчивость по Пуассону является лишь характеристическим свойством рекуррентности движений. Это позволило в работе [5] установить полное взаимоотношение движений в абстрактном метрическом пространстве Σ (см. теорему 1.1 ниже). Целью настоящей работы является приложение теоремы 1.1 к изучению движений в сепарабельном локально компактном метрическом пространстве с инвариантной (конечной положительной или бесконечной) мерой Каратеодори. Основной результат составляет теорема 3.1, в которой утверждается, что в таком пространстве почти все точки лежат на траекториях движений, которые являются или рекуррентными, или уходящими. Помимо теоремы 1.1, теорема 3.1 опирается также на классические теоремы о возвращении Пуанкаре–Каратеодори и Хопфа (см., например, [2, с. 471, 479]). Здесь необходимо отметить, что предположение о локальной компактности пространства Σ, используемое при доказательстве теоремы 3.1, не является слишком обязывающим (см., например, [6, с. 490]).

1. Произвольные и рекуррентные движения

Пусть Σ — метрическое пространство с метрикой d и $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ — действительная ось. Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{R}\times\Sigma\to\Sigma$, определенное соотношением

$$f(t,p)=g^t p.$$

При этом будем считать, что:

(a) отображение f непрерывно по совокупности переменных t,p на множестве $\mathbb{R}\times\Sigma$;

(b) для всех $p\in\Sigma$

$$g^0 p=p;$$

(c) для всех $t,s\in\mathbb{R}$

$$g^{t+s}=g^t g^s.$$

Тогда, следуя [2, с. 347], будем говорить, что группа преобразований g^t — *динамическая система*, а для любого $p \in \Sigma$ функция $t \to f(t,p)$ — *движение*.

Приведем определение рекуррентного движения, которое прочно устоялось в современной литературе (см., например, [2, с. 402]).

Определение 1.1. Движение $f(t,p)$ называется *рекуррентным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $T_\varepsilon > 0$, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ дуга

$$K_{\tau,T_\varepsilon}(p) = \{f(t,p)\colon\ t \in [\tau, \tau + T_\varepsilon]\}$$

траектории

$$K(p) = \{f(t,p)\colon\ t \in \mathbb{R}\}$$

этого движения аппроксимирует всю траекторию $K(p)$ с точностью ε, т. е. при заданном ε и соответствующим ему T_ε для всех $s \in \mathbb{R}$ и $\tau \in \mathbb{R}$ найдется такое $t \in [\tau, \tau + T_\varepsilon]$, что

$$d(f(s,p), f(t,p)) < \varepsilon.$$

Напомним, что множество $M \subset \Sigma$ называется *минимальным*, если оно непусто, замкнуто, инвариантно и не содержит ни одного собственного подмножества, обладающего тремя указанными выше свойствами (см., например, [2, с. 400]). Кроме того, заметим, что в полном пространстве Σ замыкание $\bar{K}(p)$ траектории $K(p)$ рекуррентного движения $f(t,p)$ является компактным минимальным множеством M, а каждое движение $f(t,p)$, расположенное в компактном минимальном множестве M, рекуррентно (см. [2, с. 404, 402]).

Чтобы дополнить эти фундаментальные результаты теоремой о взаимоотношении движений, введем следующие определения.

Определение 1.2. Движение $f(t,p)$ называется *положительно асимптотическим* по отношению к своему ω-предельному множеству Ω, если $p \notin \Omega$ (см., например, [2, с. 363]). Аналогичным образом, движение $f(t,p)$ называется *отрицательно асимптотическим* по отношению к своему α-предельному множеству A, если $p \notin \mathrm{A}$.

Определение 1.3. Будем говорить, что $f(t,p)$ — *положительно уходящее движение*, если его ω-предельное множество или пусто, или не компактно. Аналогичным образом, будем говорить, что $f(t,p)$ — *отрицательно уходящее движение*, если его α-предельное множество или пусто, или не компактно. Движение $f(t,p)$, одновременно положительно и отрицательно уходящее, будем называть (просто) *уходящим*.

Принимая по внимание определения 1.2 и 1.3, заключаем, что взаимоотношение движений в пространстве Σ устанавливает следующая теорема (см. [5]).

Теорема 1.1. *Любое нерекуррентное движение $f(t,p)$, расположенное в метрическом пространстве Σ, является или положительно (отрицательно) уходящим, или положительно (отрицательно) асимптотическим по отношению к компактному минимальному множеству M^+ (M^-), которое является ω- (α-) предельным множеством этого движения.*

Здесь мы приводим формулировку теоремы 1.1, а не ограничиваемся ссылкой на работу [5], в которой данная теорема получена, потому что это утверждение во многом определяет все последующие построения.

З а м е ч а н и е 1.1. Согласно теореме 1.1 любая попытка построения предельного множества типа гомоклинического (или гетероклинического) аттрактора динамической системы g^t лишена какого-либо смысла. В работе [7] приведен простейший пример, который объясняет причину возникающей здесь ошибки для системы g^t, заданной на действительной плоскости $\mathbb{R}^2$.

2. Мера Каратеодори

В дальнейшем в соответствии с [2, гл. VI] будут изучаться движения системы g^t, заданной в пространстве с инвариантной мерой Каратеодори. Поэтому, во избежание возможных разночтений, приведем определение и основные свойства этой меры.

Будем говорить, что в метрическом пространстве Σ введена *мера Каратеодори* μ, т. е. мера, определяемая следующими аксиомами (см., например, [2, с. 456]):

(α) для каждого множества $A \subset \Sigma$ $\mu A \geq 0$, причем существуют множества положительной конечной меры, а мера пустого множества равна нулю;

(β) если $A \subset B$, то $\mu A \leq \mu B$;

(γ) для любой счетной последовательности множеств справедливо неравенство

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu A_k;$$

(δ) если для $A, B \subset \Sigma$ выполнено $d(A, B) = \inf\{d(a, b)\colon\ a \in A,\ b \in B\} > 0$, то

$$\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B.$$

О п р е д е л е н и е 2.1. Множество $A \subset \Sigma$ называется *измеримым*, если для каждого множества E, удовлетворяющего условию $\mu E < +\infty$, имеет место равенство

$$\mu E = \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus E \cap A).$$

Приведем основные свойства измеримых множеств.

(i) Все открытые и замкнутые множества измеримы.

(ii) Если множество A измеримо, то измеримо также и множество $B = \Sigma \setminus A$.

(iii) Пересечение любой конечной или счетной системы измеримых множеств измеримо.

(iv) Объединение любой конечной или счетной системы измеримых множеств измеримо.

Легко видеть, что все множества, измеримые по Борелю, измеримы по Каратеодори. Поэтому, чтобы связать меру Каратеодори с мерой Бореля, вводится следующая дополнительная к аксиомам (α)–(δ) аксиома:

(ε) мера каждого измеримого множества $A \subset \Sigma$ равна точной нижней грани мер Борелевских множеств, содержащих A.

Таким образом, во многих важных случаях мера Каратеодори может быть определена как обобщенная внешняя мера Лебега (со всеми вытекающими отсюда следствиями).

3. Взаимоотношение движений в пространстве с инвариантной мерой

Везде в дальнейшем будем считать, что Σ — сепарабельное локально компактное метрическое пространство.

Рассмотрим динамическую систему g^t и предположим, что в Σ для g^t определена инвариантная мера Каратеодори μ. Другими словами, будем считать, что если A — произвольное измеримое множество, то для всех $t \in \mathbb{R}$

$$\mu(g^t A) = \mu A.$$

Кроме того, предположим, что $\mu\Sigma \in (0, +\infty]$, а мера μF любого компактного множества $F \subset \Sigma$ конечна. Тогда взаимоотношение движений в пространстве Σ с инвариантной мерой Каратеодори μ устанавливает следующая

Теорема 3.1. *В пространстве Σ почти все точки лежат на траекториях движений, которые являются или рекуррентными, или уходящими, т. е. в пространстве Σ множество точек Γ, лежащих на траекториях неуходящих и нерекуррентных движений, имеет меру нуль. Более того, любое движение $f(t,p)$, расположенное в множестве Γ, является как положительно, так и отрицательно асимптотическим по отношению к компактным минимальным множествам $M^+ \subset \Sigma \setminus \Gamma$ и $M^- \subset \Sigma \setminus \Gamma$, которые являются соответственно ω- и α-предельными множествами этого движения.*

Доказательство. Так как Σ — сепарабельное локально компактное метрическое пространство, то существует такая счетная последовательность компактных множеств

$$\Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \ldots \subset \Sigma_j \subset \ldots, \tag{3.1}$$

что Σ может быть представлено в виде

$$\Sigma = \bigcup_{j \geq 1} \Sigma_j, \tag{3.2}$$

причем так, что каждая точка $p \in \Sigma$ является внутренней точкой одного из множеств Σ_j (см, например, [8, с. 372]).

Зафиксируем некоторую точку $p \in \Sigma_j$. Тогда, если движение $f(t,p)$ не является положительно или отрицательно уходящим, то в силу (3.1) и (3.2) без какой-либо потери общности можем считать, что $f(t,p)$ расположено в Σ_j.

Поскольку множество Σ_j компактно, то согласно теореме 1.1 возможны следующие два взаимоисключающие случая.

(A) Движение $f(t,p)$ является рекуррентным. В этом случае замыкание $\bar{K}$ траектории K данного движения представляет собой компактное минимальное множество.

(B) Движение $f(t,p)$ не является рекуррентным. В этом случае движение $f(t,p)$ представляет собой движение, асимптотическое по отношению к своим ω- и α- предельным множествам $M^+ \subset \Sigma \setminus \Gamma$ и $M^- \subset \Sigma \setminus \Gamma$. Более того, любое из множеств M^+ и M^- является компактным минимальным множеством.

В дополнение к (A) и (B) заметим, что в силу теоремы Хопфа (см. [2, с. 479]) множество Γ измеримо и его мера равна нулю (в [2] теорема Хопфа доказана для случая $\mu\Sigma = +\infty$, однако, несложный анализ доказательства показывает, что эта теорема справедлива и в случае $\mu\Sigma \in (0, +\infty)$, см. также [2, с. 471]). При этом почти все положительно (отрицательно) уходящие движения являются или устойчивыми по Пуассону, или строго уходящими (см. п. 4.). Значит, все эти движения являются просто уходящими. □

З а м е ч а н и е 3.1. Как известно, во многих важных практических ситуациях мера Каратеодори μ обладает следующим свойством: если E — произвольное непустое открытое множество, то $\mu E > 0$. В этом случае, очевидно, множество $\Sigma \setminus \Gamma$ всюду плотно в пространстве Σ.

4. Устойчивость по Пуассону

В дополнение к теореме 3.1 обсудим проблему существования устойчивых по Пуассону нерекуррентных движений в сепарабельном локально компактном метрическом пространстве.

Как и выше, обозначим ω-предельное множество движения $f(t,p)$ через Ω, а его α-предельное множество через A. Напомним, что движение $f(t,p)$ называется *положительно устойчивым по Пуассону*, если $p \in \Omega$ (см. [2, с. 364]). Аналогичным образом, движение $f(t,p)$ называется *отрицательно устойчивым по Пуассону*, если $p \in \mathrm{A}$. Если же $p \in \Omega$ и $p \in \mathrm{A}$, то движение $f(t,p)$ называется (просто) *устойчивым по Пуассону*.

В развитие определения 1.3 будем говорить, что $f(t,p)$ — *строго положительно уходящее движение*, если его ω-предельное множество пусто. Аналогичным образом, будем говорить, что $f(t,p)$ — *строго отрицательно уходящее движение*, если его α-предельное множество пусто. Движение $f(t,p)$, одновременно строго положительно и строго отрицательно уходящее, будем называть (просто) *строго уходящим*.

Как уже было отмечено, каждое рекуррентное движение устойчиво по Пуассону. Теорема 1.1 позволяет уточнить это утверждение, поскольку из нее сразу следует, что в компактном метрическом пространстве Σ любое положительно (отрицательно) устойчивое по Пуассону движение $f(t,p)$ является рекуррентным. Однако, в локально компактном пространстве Σ проблема существования устойчивых по Пуассону нерекуррентных движений остается открытой.

В самом деле, согласно теореме Хопфа в условиях теоремы 3.1 все точки множества $\Sigma \setminus \Gamma$ лежат на траекториях либо устойчивых по Пуассону, либо строго уходящих движений. Очевидно, что каждое строго уходящее движение является уходящим, но не обратно. Следовательно, существование устойчивых по Пуассону уходящих (но не строго) движений не исключается, т. е. не исключается существование устойчивых по Пуассону уходящих нерекуррентных движений.

References

[1] Дж. Биркгоф, *Динамические системы*, Изд. дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999. [G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Udm. University Publ., Izhevsk, 1999 (In Russian)].

[2] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, УРСС, М., 2004. [V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, URSS Publ., Moscow, 2004 (In Russian)].

[3] D. N. Cheban, *Asymptotically Almost Periodic Solutions of Differential Equations*, HPC Publ., New York, 2009.

[4] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “О новых свойствах рекуррентных движений и минимальных множеств динамических систем”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 5–14. [A. P. Afanas’ev, S. M. Dzyuba, “About new properties of recurrent motions and minimal sets of dynamical systems”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:133 (2021), 5–14 (In Russian)].

[5] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “О взаимоотношении движений динамических систем”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:138 (2022), 136–142. [A. P. Afanas’ev, S. M. Dzyuba, “On the interrelation of motions of dynamical systems”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:138 (2022), 136–142 (In Russian)].

[6] Л. Шварц, *Анализ.* Т. I, Мир, М., 1972. [L. Schwartz, *Analisys.* V. I, Mir Publ., Moscow, 1972 (In Russian)].

[7] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “Новые свойства рекуррентных движений и предельных множеств динамических систем”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:137 (2022), 5–15. [A. P. Afanas’ev, S. M. Dzyuba, “New properties of recurrent motions and limit sets of dynamical systems”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:137 (2022), 5–15 (In Russian)].

[8] П. С. Александров, *Введение в общую теорию множеств и функций*, ОГИЗ–Гостехиздат, М., 1948. [P. S. Alexandroff, *Introduction to the general theory of sets and funcrions*, OGIZ–Gostekhizdat Publ., Moscow, 1948 (In Russian)].

Информация об авторах

Афанасьев Александр Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий центром распределенных вычислений, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук; профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: apa@iitp.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4171-5745

Дзюба Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем. Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2981-8549

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Дзюба Сергей Михайлович
E-mail: sdzyuba@mail.ru

Поступила в редакцию 19.09.2022 г.
Поступила после рецензирования 20.12.2022 г.
Принята к публикации 10.03.2023 г.

Information about the authors

Aleksandr P. Afanas’ev, Doctor of Physics and Mathematics, the Head of the Center for Distributed Computing, Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences; Professor, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation. E-mail: apa@iitp.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4171-5745

Sergei M. Dzyuba, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems Department. Tver State Technical University, Tver, Russian Federation. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2981-8549

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Sergei M. Dzyuba
E-mail: sdzyuba@mail.ru

Received 19.09.2022
Reviewed 20.12.2022
Accepted for press 10.03.2023